Normal sample mean

Monday, May 27, 2024 08:33

元气满~出发！

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$ → 表示为 $x_1-\bar{x}$ / $(x_2-\bar{x}),(x_3-\bar{x})\cdots(x_n-\bar{x})$

$$=\frac{1}{n-1}\left[(x_1-\bar{x})^2+\sum_{i=2}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$ → $x_1-\bar{x}$ 可以用其余项表示

$$=\frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=2}^{n}(x_i-\bar{x})\right)^2+\sum(x_i-\bar{x})^2\right]$$

$$\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}_{0}-\sum_{i=2}^{n}(x_i-\bar{x})\Big]^2$$

WLOG, assume $\mu=0,\ \sigma^2=1$.

Joint PDF of $x_1, x_2 \dots x_n$:

$$f(x_1,x_2\dots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

$\therefore$ let $y_1=\bar{x},\ y_2=x_2-\bar{x}\ \cdots\ y_n=x_n-\bar{x}$

$x_1=y_1-\sum y_j \quad x_2=y_2+\bar{x}\ \cdots\ x_n=y_n+\bar{x}$

$y_1=\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots x_n)$

$y_1=\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots x_n)$

$ny_1=x_1+x_2+\dots x_n$

$\underline{ny_1-n\bar{x}}=(x_1-\bar{x})+\sum_{j=2}^{n}(x_j-\bar{x})$

为什么要凑 $x_j-\bar{x}$
因为 $y_j=x_j-\bar{x}$
我们想找 y_j PDF.

$0=x_1-\bar{x}+\sum(x_j-\bar{x})$ → 全部写成y的形式

$y_1=\bar{x}$ $\quad x_1=\bar{x}-\sum_{j=2}^{n}(x_j-\bar{x})$

$=y_1-\sum_{j=2}^{n}y_j$

$$f(y_1,y_2\dots y_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(y_1-\sum y_j)^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sum(y_j+y_1)^2}\ |J|$$

n 待补充

这里是(n-1) 哭哭
检查100遍了.

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[y_1^2+(\sum y_j)^2-2y_1\sum y_j+\sum y_j^2+ny_1^2+2y_1\sum y_j\right]}\ n$$

$n-1$

$$e^{-\frac{1}{2}(\sum y_j^2+(\sum y_j)^2)}\cdot e^{-\frac{1}{2}(n\cdot y_1^2)}$$

$$=\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\sum y_j^2+(\sum y_j)^2)}}_{②}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{2}ny_1^2}}_{①}$$

这里是为了凑一个
$\bar{X}$ 的分布和
一个 S^2 的分布

$$=\underbrace{\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}ny_1^2}}_{①}\cdot\underbrace{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{(n-1)/2}}e^{-\frac{1}{2}(\sum y_i^2+(\sum y_i)^2)}}_{②}$$

$\Rightarrow y_1=\bar{x},\ y_j:x_j-\bar{x}\ \perp\!\!\!\perp$

思路总结：证 $\bar{X}$ & $\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$ $\perp\!\!\!\perp$.

$\Rightarrow$ 证 $\bar{X}$ 与 $\underbrace{(X_2-\bar{X},\ X_3-\bar{X},\ \dots\ X_n-\bar{X})}_{\text{因为 } S^2 \text{ 可以由 ↗ 表示}}$ $\perp\!\!\!\perp$.

① $f_{\bar{X},S^2}=f_{\bar{X}}\cdot f_{S^2}$

② tricks: WLOG, assume $X\sim N(0,1)$

③ Jacobian $=n$ → 并不是很懂

④ $X_1=y_1-\sum_{i=2}^{n}y_i$ ☆

方法② 用MGF证明 $\bar{X}_n$ 与每个 i.e. $X_i-\bar{X}$ $\perp\!\!\!\perp$,

则 $\bar{X}_n$ 与 S_n^2 (a fun. of $X_2-\bar{X}$, $X_3-\bar{X}$, …) $\perp\!\!\!\perp$.

待补充

方法③ 用 covariance 证明，$U=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$，$V=\sum_{i=1}^{n}b_iX_i$

$U=\frac{1}{n}\sum X_i\ (\bar{X})$ → 系数 $\frac{1}{n}$

$V=\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}-\frac{1}{n})X_i$ → 系数 $\delta_{ij}-\frac{1}{n}$.

indicator if $i=j$ $\delta_{ij}=1$; 0 otherwise

$=\sum\delta_{ij}X_i-\underbrace{\sum\frac{1}{n}X_i}_{\bar{X}}$

$\mathrm{cov}(U,V)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}(\delta_{ij}-\frac{1}{n})\sigma_j^2$ WLOG, assume $X\sim N(0,1)$

$=0$

方法④ sufficient. Basu thm